

## **Квадрат как особый вид четырёхугольника**

Шадрина Диана Владимировна

Россия, Тюменская область, Сладковский район

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение

Маслянская средняя общеобразовательная школа

8 класс

Возьму линейку, проведу прямую,  
И мигом круг квадратом обернется,  
Посередине рынок мы устроим,  
А от него уж улицы пойдут-  
Ну, как на Солнце! Хоть оно само  
И круглое, а ведь лучи прямые!..  
Аристофан.

Многоугольники с древних времён привлекали к себе внимание ученых, архитекторов, художников. Их поражала красота, совершенство, гармония этих фигур. Пифагорейцы считали эти многоугольники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира.

Одной из древнейших математических и самых популярных математических задач, является задача о квадратуре круга, то есть о построении с помощью циркуля и линейки квадрата.

Различные другие, продолжавшиеся в течение тысячелетий, попытки найти квадратуру круга неизменно оканчивались неудачей. Лишь в 80-х годах девятнадцатого века было строго доказано, что квадратура круга с помощью циркуля и линейки невозможна.

Решение данной задачи содействовало появлению новых идей и понятий в математике.

Итак, геометрия как наука интересовала людей еще с древних времен, и сейчас она остается актуальной.

Из всех четырёхугольников наибольший интерес вызывает квадрат, так как обладает уникальными свойствами.

Объект исследования – квадрат как многоугольник

Предмет исследования – свойства квадрата.

Цель исследования – выявление отличительных свойств квадрата в сравнении с другими многоугольниками.

Гипотеза исследования основывается на предположении, что зная свойства квадрата,

можно решить ряд практических задач.

В соответствии с предметом, целью и гипотезой исследования определены следующие задачи:

- изучить различные трактовки определения квадрата как геометрической фигуры;
- выявить сходства и различия свойств квадрата со свойствами других многоугольников;
- определить все свойства квадрата, являющиеся определяющими его как геометрической фигуры;
- рассмотреть практическое применение знаний о свойствах квадрата.

Выскажем предположение о том, что определение квадрата может быть сформулировано различными способами, основываясь на выявленных сходствах свойств с другими четырёхугольниками.

В работе использовались методы сравнения, анализа и сопоставления данных, структурирования и наблюдения.

### **Квадрат и его свойства**

#### **Определение квадрата и его свойства**

Планиметрия занимается изучением геометрических фигур на плоскости, а значит и изучает многоугольники.

Многоугольник - это плоская фигура, образованная замкнутым рядом прямолинейных отрезков. В элементарной геометрии рассматриваются только простые многоугольники, то есть такие, контур которых не имеет самопересечений. Существуют различные виды многоугольников. Например, треугольник, параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция и т.д.

Так, как данная работа посвящена квадрату, то мы и будем рассматривать его подробнее.

Сначала нужно дать определение данной геометрической фигуре. В учебнике по геометрии за 7-9 класс Л.С. Атанасяна определение звучит так: Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны. В свою очередь в справочнике по элементарной геометрии М. Я. Выгодского определение дается такое: Квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами. Квадрат есть частный вид прямоугольника, а также частный вид ромба.

Определения разные, но обозначают одну фигуру. В других источниках написано, что квадрат- это четырехугольник, у которого все стороны и углы равны.

Повторимся, определения разные, но обозначают одну фигуру. Значит, есть что-то уникальное, что объединяет в себе квадрат.

Фигура достаточно интересна. Квадрат имеет четырехугольную форму. Стороны квадрата равны и попарно параллельны. Так как стороны равны, то площадь квадрата находится по формуле  $S=a^2$ .

Углы в данной фигуре тоже равны, все они по  $90^\circ$ . Сумма углов квадрата  $360^\circ$ , а два угла прилежающих к одной стороне в сумме дают  $180^\circ$ .

Диагонали данной фигуры равны и встречаются под прямым углом, то есть они взаимно перпендикулярны. Кроме этого они являются биссектрисами, делящими угол пополам. Точка пересечения диагоналей делит их пополам на равные отрезки. Точка пересечения – это центр фигуры, равноудаленный от всех вершин. Одна диагональ делит квадрат на два равных треугольника.

Так же он является выпуклым многоугольником потому, что лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Квадрат- это и симметричная фигура потому, что для каждой точки квадрата найдётся симметричная ей точка относительно прямой, также принадлежащая этой фигуре. Он имеет четыре оси симметрии, и одну точку центральной симметрии.

Квадрат- это подобная фигура, так как две смежных стороны одного квадрата пропорциональны двум смежным сторонам другого квадрата. В квадрат можно вписать окружность, ее центр точка пересечения диагоналей. В квадрат можно вписать окружность потому, что сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ . Около квадрата можно описать окружность, ее центр совпадает с центром вписанной окружности. Около квадрата можно описать окружность потому, что суммы противоположных углов равны.

А ещё квадрат является правильным многоугольником потому, что углы и стороны равны.

Как видим, лишь перечисление всех свойств квадрата занимает достаточно много места. Детальное же рассмотрение каждого из них может служить отдельным пунктом, параграфом.

### **Сходство и различия свойств квадрата со свойствами другими четырёхугольниками**

Квадрат – очень интересная фигура, несущая в себе множество свойств, которые не сразу можно заметить. Одной из целей данной работы – это нахождение сходств и различий квадрата с другими четырёхугольниками.

Данная фигура очень схожа с такими геометрическими фигурами, как прямоугольник, ромб, параллелограмм. Такое сходство обусловлено тем, что все эти фигуры из раздела геометрии – планиметрии. Их ещё соединяет то, что они все четырёхугольники, то есть многоугольники. Так, как квадрат схож с ними, то он обладает некоторыми их свойствами.

В одном из определений было написано, что квадрат- это прямоугольник.

Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом. Прямоугольник – симметричная фигура относительно серединного перпендикуляра к его стороне. Стороны попарно равны и параллельны. Он симметричен так, как имеет две оси симметрии. Все углы равны и по  $90^\circ$ . Углы прилежащие к одной стороне прямоугольника в сумме дают  $180^\circ$ , сумма всех углов данного четырехугольника равна  $360^\circ$ . Диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, а еще являются биссектрисами.

Прямоугольник выпуклая фигура потому, что лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Прямоугольник – это и подобная фигура так, как смежные стороны одного прямоугольника пропорциональны двум сторонам другого прямоугольника. Он еще и симметричная фигура потому, что имеет две оси симметрии.

Квадрат- это и ромб, если следовать определению.

Ромбом называется параллелограмм, две пересекающиеся стороны которого равны. У ромба четырехугольная форма. Смежные стороны равны и параллельны. Диагонали не равны, но проходят под прямым углом, то есть взаимно перпендикулярны, и являются биссектрисами, точкой пересечения делятся пополам. Одна диагональ делит ромб на два равных треугольника. Сумма углов  $360^\circ$ , а сумма углов при одной стороне равна  $180^\circ$ , но углы не равные. Ромб – это и симметричная фигура так, как для каждой точки ромба симметрична ей точка относительно прямой, также принадлежащей этой фигуре. Он имеет две оси симметрии и является подобной фигурой.

Просматривая определения квадрата, то можно заметить, что квадрат еще является и параллелограммом.

Параллелограмм - это четырёхугольник, у которого стороны попарно параллельны и равны. Противоположные углы попарно равны. В сумме они дают  $360^\circ$ , а углы, прилежащие к одной стороне в сумме –  $180^\circ$ . Диагонали не равны, делят его на два равных треугольника, точкой пересечения делятся пополам, а так же они являются и биссектрисами углов. Параллелограмм – выпуклая фигура, симметричная и так же она подобна.

Рассматривая свойства квадрата и других фигур, можно найти определённые сходства. Стороны могут быть равны у квадрата и ромба, но не равны у прямоугольника и параллелограмма потому, что их стороны лишь попарно равны. Стороны попарно параллельны у квадрата, параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Диагонали равны у квадрата и прямоугольника, но не являются равными у параллелограмма и ромба. Это происходит потому, что углы данных геометрических фигур не

равны. Диагонали взаимно перпендикулярны у квадрата и ромба потому, что стороны данных фигур равны, а не являются перпендикулярными диагонали у параллелограмма и прямоугольника. Точкой пересечения двух диагоналей делятся все фигуры на равные части.

Сумма углов равна  $360^\circ$ , два угла прилежащих к одной стороне дают  $180^\circ$  этим свойством обладают так же все фигуры. Все углы равны только у квадрата и прямоугольника, но таким свойством не обладают ромб и параллелограмм потому, что их построение отличается от построения ромба и квадрата.

Все это наглядно можно увидеть в таблице, которая приведена чуть ниже (см. таблица 1).

Квадрат – фигура симметричная. Он имеет несколько осей симметрии и центр симметрии. Сравнивая эти данные с другими фигурами, делаем вывод, что и с этой точки зрения, квадрат схож с другими четырёхугольниками (см. таблицу 2).

Сравнительная таблица свойств четырёхугольников

Таблица 1

|           | Свойства                                        | квадрат | прямоугольник | ромб | параллелограмм | вывод                                             |
|-----------|-------------------------------------------------|---------|---------------|------|----------------|---------------------------------------------------|
| стороны   | Стороны равны                                   | +       | -             | +    | -              | Квадрат – ромб                                    |
|           | Стороны попарно параллельны                     | +       | +             | +    | +              | Квадрат – прямоугольник<br>ромб<br>параллелограмм |
| диагонали | Диагонали равны                                 | +       | +             | -    | -              | Квадрат – прямоугольник                           |
|           | Диагонали взаимно перпендикулярны               | +       | -             | +    | -              | Квадрат – ромб                                    |
|           | Диагонали точкой пересечения делятся пополам    | +       | +             | +    | +              | Квадрат – прямоугольник<br>ромб<br>параллелограмм |
| углы      | Углы равны                                      | +       | +             | -    | -              | Квадрат – прямоугольник                           |
|           | Сумма углов равна $360^\circ$                   | +       | +             | +    | +              | Квадрат – прямоугольник<br>ромб<br>параллелограмм |
|           | Сумма углов при одной стороне равна $180^\circ$ | +       | +             | +    | +              | Квадрат – прямоугольник<br>ромб<br>параллелограмм |

### Сравнительная таблица количества элементов симметрии

Таблица 2

|           | Свойства                     | квадрат                                         | прямоугольник                        | ромб                                 | параллелограмм                       | вывод                                            |
|-----------|------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------------------|
| симметрия | Количество осей симметрии    | 4<br>2-диагонали<br>2-серединные перпендикуляры | 2<br>серединные перпендикуляры       | 2<br>диагонали                       | -                                    | Квадрат – ромб<br>прямоугольник                  |
|           | Количество центров симметрии | 1<br>Точка<br>пересечения диагоналей            | 1<br>Точка<br>пересечения диагоналей | 1<br>Точка<br>пересечения диагоналей | 1<br>Точка<br>пересечения диагоналей | Квадрат- ромб<br>прямоугольник<br>параллелограмм |

Почему даны такие разные определения квадрата? Теперь на этот вопрос можно с легкостью ответить. Квадрат объединяет в себе многие свойства таких фигур, как прямоугольник, ромб и параллелограмм. Именно поэтому определения в учебниках, справочниках и других пособиях даны по-разному, но понимается одно и то же. Несмотря на сходства, конечно, присутствуют и различия. Это обусловлено тем, что в одной фигуре объединены свойства разных фигур, которые в свою очередь могут быть не совместимыми. Например, у квадрата одновременно не может быть и равных и не равных углов.

Можно с уверенностью подтвердить, что все ниже перечисленные определения верны.

Квадрат - это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат - это четырехугольник, у которого все стороны и углы равны.

Квадрат - это прямоугольник, две перпендикулярные стороны, которого равны.

Квадрат- это ромб, у которого все углы прямые.

Квадрат - это параллелограмм, у которого все стороны и углы равны.

Квадрат - это многоугольник, у которого 4 стороны и 4 угла и все они между собой равны

## **Глава 2. Использование свойств квадрата на практике.**

### **2.1. Решение задач с практическим содержанием.**

Очень широко используются свойства квадратов и на практике. Во всех книгах по истории математики сказано, что геометрия как наука возникла на основе практической деятельности людей и в начале своего развития преимущественно служила практическим целям. В повседневной жизни такие знания неплохо помогают, особенно в архитектуре, строительстве, где без этого не обойтись.

В данной работе рассмотрено несколько задач практического содержания, основанных на жизненных ситуациях. Все приведённые ниже задачи взяты не из учебника геометрии. Для решения этих задач нужно использовать только свойства квадрата, и никаких вычислений производить не нужно.

Например, для решения задач № 1 и 6 , использовались такие свойства, как:



- стороны квадрата равны;
- диагонали в квадрате равны.

А вот в задаче № 2 использовалось такое свойство:

- точки пересечения делят диагональ на равные отрезки

В задаче № 3 потребовалось знать следующие свойства диагоналей и углов:

- диагональ является биссектрисой угла;
- угол квадрата равен  $90^\circ$ .

Задачи № 4и 5 решались с помощью того, что диагонали в квадрате проходят перпендикулярно.

Для решения задач № 7 и 8 нужно было знать одно свойство:

- стороны квадрата равны.

Решение некоторых задач можно увидеть в приведенной ниже таблице

(см. таблица 3).

**Использование свойств квадрата  
для решения задач с практическим содержанием**

**Таблица 3**

| №<br>п/п | Текст задачи                                                                                                                | Практическое решение                                                                      | Используемые<br>свойства квадрата                                                                                  |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | Школьная мастерская изготовила партию пластин четырёхугольной формы. Как проверить, будет ли пластина иметь форму квадрата, | Масштабной линейкой<br>замерить стороны, они<br>должны быть равны.<br>Провести диагонали, | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Стороны квадрата равны.</li> <li>▪ Диагонали в квадрате равны.</li> </ul> |

|   |                                                                                                                                                                                |                                                                                                                           |                                                                                                                                                                               |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | располагая лишь масштабной линейкой?                                                                                                                                           | они тоже должны быть равны.                                                                                               |                                                                                                                                                                               |
| 2 | В квадратной пластине нужно просверлить отверстие на равном расстоянии вершин. Как найти центр этого отверстия?                                                                | В фигуре нужно провести диагонали. Точка пересечения и будет являться центром.                                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Точка пересечения делит диагонали на равные отрезки.</li> </ul>                                                                      |
| 3 | Заготовлены одинаковые по ширине рейки в форме прямоугольников. Не используя угломера, как обрезать концы реек под углом в $45^\circ$ , чтобы из них можно было сложить рамку? | Замерить длину рейки, отложить такое же расстояние на ширине и провести прямую. В полученном квадрате провести диагональ. | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Диагональ квадрата является и биссектрисой угла.</li> <li>▪ Угол в квадрате прямой, то есть, равен <math>90^\circ</math>.</li> </ul> |
| 4 | Из листа стали, вырезан четырехугольник с равными сторонами. Как убедиться, не измеряя углов, будет ли четырехугольник квадратом?                                              | В фигуре нужно провести диагонали, если они равны и перпендикулярны, а стороны тоже равны - это квадрат.                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Стороны квадрата равны.</li> <li>▪ Диагонали в квадрате равны.</li> <li>▪ Диагонали в квадрате проходят</li> </ul>                   |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                           |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                  | перпендикулярно.                                                                                                                          |
| 5 | Паркетчик, проверяя, имеет ли выпиленный четырехугольник форму квадрата, убеждается, что диагонали равны и встречаются под прямым углом. Достаточно ли такая проверка?                                                                                                                                | <p>Диагонали равны и встречаются под прямым углом.</p> <p>Диагонали равны только у прямоугольника и квадрата, значит это точно не ромб.</p> <p>Диагонали встречаются под прямым углом, значит - это квадрат.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Диагонали в квадрате равны.</li> <li>▪ Диагонали в квадрате проходят перпендикулярно.</li> </ul> |
| 6 | Хотят убедиться, что кусок материи имеет форму квадрата. Для этого материю перегибают сначала по одной, потом по другой диагонали. Образующиеся треугольники оба раза точно совпадают. Можно ли считать, что подобная проверка показывает, что этот кусок материи действительно имеет форму квадрата? | <p>Материю перегибают сначала по одной, потом по другой диагонали.</p> <p>Образующиеся треугольники оба раза точно совпадают, то есть, получаем четыре равных треугольника.</p>                                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Стороны квадрата равны.</li> <li>▪ Диагонали в квадрате равны.</li> </ul>                        |
| 7 | Стороны квадратной шайбы равны 60                                                                                                                                                                                                                                                                     | По ширине листа                                                                                                                                                                                                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Стороны</li> </ul>                                                                               |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                            |                                                                             |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
|     | мм. Какой длины, должен быть лист стали, чтобы из него сделать 50 шайб? Ширина листа 300мм.                                                                                                                                                                                  | размещаются 5 шайб с указанной стороной, следовательно, по длине листа необходимо разместить 10 шайб со стороной 60 мм для указанного количества, т.е. длина листа 600 мм. | квадрата равны.                                                             |
| 8   | Имеется девять палочек различной длины от 1 до 9 см. Квадраты, с какими сторонами и сколькими способами можно составить из этих палочек? (Не обязательно использовать все палочки; способы составления одного квадрата считаются разными, если использованы разные палочки.) | Методом подбора собираем квадрат, зная, что его стороны равны. Например, 1 сторона – 9 см, другая – 1 см и 8 см, третья – 3 см и 6 см, четвёртая – 4 см и 5 см.            | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Стороны квадрата равны.</li> </ul> |
| 9   | Методом перегибания точно разделить сторону квадрата на три равные части.                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                            |                                                                             |
| 10. | Из произвольного листа бумаги                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                            |                                                                             |

|  |                                   |  |  |
|--|-----------------------------------|--|--|
|  | получите с помощью сгибов квадрат |  |  |
|--|-----------------------------------|--|--|

## 2.2. Использование свойств квадрата в технике оригами

### Деление отрезка на равные части

Из произвольного листа бумаги при помощи сгибов можно получить квадрат. Если на этом листе бумаги дан отрезок, который требуется разделить, то всегда сначала можно построить квадрат со стороной равной этому отрезку, а затем разделить сторону квадрата.

В задачах этого раздела происходит деление на равные части стороны квадрата (прямоугольника) при этом подразумевается, что длина заданного отрезка равна стороне квадрата.

### Заключение

Таким образом, согласно исследованиям можно сделать выводы:

1. Все ниже перечисленные определения верны:

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат – это четырехугольник, у которого все стороны и углы равны.

Квадратом называется прямоугольник, две перпендикулярные стороны, которого равны.

Квадрат - ромб, у которого все углы прямые.

Квадрат – это параллелограмм, у которого все стороны и углы равны.

2. Квадрат объединяет в себе некоторые свойства таких фигур, как прямоугольник, ромб и параллелограмм.

3. Зная свойства квадрата, можно решить ряд геометрических задач.

4. Данное исследование можно применить и в быту.

## **Список используемой литературы**

1. Александров, А.Д., Вернер, А.П., Рыжик, В.И. Геометрия. Пробный учебник для 8 класса средней школы [текст] / А.Д. Александров, А.П. Вернер., В.И. Рыжик - М.: Просвещение, 1986. – с. 54 – 70, 111 – 116, 131 – 133.
2. Атанасян, Л.С. Геометрия, 7-9 : учеб. Для общеобразоват. учреждений [текст, рис] /Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. - 15-е изд. – М.: Просвещение, 2005. - стр. 110, 130.
3. Глейзер, Г.И. История математики в школе 7-8 кл. Пособие для учителей [текст, рис] / М.: Просвещение, 1981. – с.189 – 200.
4. Гусев, В.А., Мордкович, А.Г. Математика : Алгебра: Геометрия: прил.: справ.материалы: Учеб.пособие для учащихся. [текст] / М.: Просвещение, 1986.
5. Киселёв, А.П. .Элементарная геометрия [текст] / А.П. Киселёв- М.: Просвещение, 1980.
6. Преподавание математики в сельской школе: (Из опыта работы). Кн. для учителя. Сб. метод.статей [текст] / Сост. Ю.М.Колягин, О.А. Боковнев. – М.: просвещение, 1984. – с.81 – 93.
7. Современные проблемы методики преподавания математики : Сб. статей. Учеб.пособие для студентов мат. и физ. – мат. спец. пед. ин-тов / Сост. Н.С. Антонов, В.А. Гусев. [текст] / М.: Просвещение, 1985.- стр.243-244.





